



TITLE:

# サークルメソッドの応用における マイナーアーク上の積分の扱いに ついて(解析的整数論とその周辺)

AUTHOR(S):

川田, 浩一

---

CITATION:

川田, 浩一. サークルメソッドの応用におけるマイナーアーク上の積分の扱いについて(解析的整数論とその周辺). 数理解析研究所講究録 2006, 1511: 145-155

ISSUE DATE:

2006-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/58600>

RIGHT:

サークルメソッドの応用におけるマイナーアーク上の積分の扱いについて.

Koichi KAWADA (川田 浩一)  
Faculty of Education, Iwate University  
(岩手大学 教育学部)

1. 序.

Brüdern, Wooley 両氏との共著論文 [1]-[3] にある手法について述べるのが今回させていただいた話の目的であった. 本原稿の §3, §4, §5 がそれぞれ論文 [2], [1], [3] の要点のつもりだが, これくらいの内容を話すことが一応の目標で, 悪くても §4 の終わりまでに行けるだろう, というのが当初の予定であったのだが, 実際には §3 の (12) のあたりまでで既に持ち時間を若干過ぎ, 唐突に定理 1 の主張を書いて終えるようなこととなった. 結果としてまとまりを欠いた発表となり, 反省するとともに, お聞き下さった方々にはお詫びを申し上げたいところである.

さて, 加法的整数論と呼ばれる分野では, 2つの素数の和, 4つの3乗数の和などといった指定された形の和で自然数を表すことに関する様々な問題を扱う. そして, 十分大きい自然数がそういった指定された形の和で表せる, というような結論を示すことを1つの目標とするわけだが, このような結論を示すことが現状ではできない場合は, あるかもしれない例外の数の, つまり問題の形の和で表せない自然数の, “密度” を評価することを考える. この密度に対して上からの自明でない評価が得られた場合は, 「ほとんど全ての自然数はその形の和で表せる」などと表現される. このようなタイプの結果を精密化するため, より密度の小さい, あるいは薄い, 集合内に限って例外の数の密度評価をする, という問題がしばしば考えられてきた. 例えば, 短い区間内に含まれる例外の数の個数の評価や, ある固定された多項式のとり値が例外の数となる確率の評価の問題などがあるが, 後者の型の問題に circle method を応用する際の方法が本稿の主たるテーマである.

2. 従来の方法.

結果的に下の §3 の後半以降の内容に全く触れられなかったことを考えると, 本節にあるような古典的な内容については自分の発表に含めるべきではなかったと後悔するところであるが, 今更言っても仕方のないことである. いずれにしてもここで Waring 問題を例にとって, 従来の方法の要点を簡単に眺めることとする. 以下本節内に記す基本的な事項の証明等については, 例えば Vaughan の本 [8] の第2章および第4章を参照されたい.

$k, s$  を与えられた, とりあえず2以上の, 自然数とし, 自然数  $n$  を  $s$  個の  $k$  乗数の和で表す仕方の数を  $R_{k,s}(n)$  とする. つまり,

$$R_{k,s}(n) = \#\{(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{N}^s : n = m_1^k + m_2^k + \dots + m_s^k\}$$

とする.  $P$  を大きな実数を表すパラメーターとし,

$$e(\alpha) = \exp(2\pi i \alpha), \quad f(\alpha) = \sum_{m \leq P} e(m^k \alpha) \quad (1)$$

とすれば, いわゆる直交性から,  $n \leq P^k$  であれば,

$$\int_0^1 f(\alpha)^s e(-n\alpha) d\alpha = \sum_{m_1 \leq P} \cdots \sum_{m_s \leq P} \int_0^1 e((m_1^k + \cdots + m_s^k - n)\alpha) d\alpha = R_{k,s}(n) \quad (2)$$

となる. この最左辺の積分を計算して  $R_{k,s}(n)$  について知ろうというわけで, この式が circle method の出発点である.  $R_{k,s}(n)$  が正であることさえ示せば良い, という立場からすれば,  $f(\alpha)$  を上のように古典的な Weyl 和とせず, 違うもので置き換える手もある. 例えば  $f(\alpha)$  の定義(1)において  $m$  を “小さい” 素因数しかもたない自然数に限ったものを, smooth Weyl sum と呼んだりするが, そういう指数和も使った方が良い結果が得られる, ということもあるのだが, ここではそういうことには触れないことにする.

さて, (2) の最左辺の積分を, 区間  $[0, 1)$  を 2 つの部分  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{m}$  に分割して計算する. この分割の厳密な定義はここでは不要だとは思いますが, 例えば

$$\mathfrak{M} = \{\alpha \in [0, 1) : \exists q \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{Z}, q \leq P \wedge |q\alpha - a| \leq (2kP^{k-1})^{-1}\}$$

として,  $\mathfrak{m} = [0, 1) \setminus \mathfrak{M}$  とする. 要するに  $\mathfrak{M}$  は分母の “小さい” 有理数に “近い”  $\alpha$  の集合で, こういうのは major arcs, その補集合  $\mathfrak{m}$  は minor arcs と呼ばれる. いま,

$$R_{k,s}(n; \mathfrak{B}) = \int_{\mathfrak{B}} f(\alpha)^s e(-n\alpha) d\alpha$$

と書くことにすれば,

$$R_{k,s}(n) = R_{k,s}(n; [0, 1)) = R_{k,s}(n; \mathfrak{M}) + R_{k,s}(n; \mathfrak{m})$$

であって, 恐らく  $R_{k,s}(n; \mathfrak{M})$  が  $R_{k,s}(n)$  の主要項を与え,  $R_{k,s}(n; \mathfrak{m})$  の方は誤差項となるだろう, と期待されるのである. 実際 circle method が応用されるほとんどの場合, major arcs 上の積分はわりと緩い制約の下で漸近的に計算される\*ので, 議論の焦点は minor arcs 上の積分をどう抑えるか, という点にあることになる. いまの例の場合は,  $s > k > 2$  なら,  $s, k$  に依存する正数  $\delta$  があって,

$$R_{k,s}(n; \mathfrak{M}) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{k}\right)^{-1} \mathfrak{S}_{k,s}(n) n^{\frac{s}{k}-1} + O(P^{s-k-\delta}) \quad (3)$$

が示される. ここで  $\Gamma$  はガンマ函数を表し,  $\mathfrak{S}_{k,s}(n)$  は singular series である.  $\mathfrak{S}_{k,s}(n)$  の定義は [8] の (2.18) に, それについて知られていることの詳細については [8] の §2.6 および第 4 章に, それぞれ譲ることとし, ここでは, singular series は問題とする方程式 (いまの

\*と言うより, そう計算できるように major arcs を定める, という方が適切であろうが.

場合は  $n = m_1^k + \cdots + m_s^k$  の各局所体内における解のある種の密度と関係していることと、曖昧な言い方でなんだが、まあ大体の場合は  $1 \ll \mathfrak{G}_{k,s}(n) \ll 1$  であること、の2点のみを述べておく。後者を認めれば、 $P^k \ll n \leq P^k$  に対して  $R_{k,s}(n; \mathfrak{M}) \gg P^{s-k}$  であるから、

$$\text{もし } P \rightarrow \infty \text{ に際して } \int_{\mathfrak{m}} |f(\alpha)|^s d\alpha = o(P^{s-k}) \text{ であれば,} \quad (4)$$

$|R_{k,s}(n, \mathfrak{m})| = o(P^{s-k})$  なので、十分大きい  $n$  に対して  $R_{k,s}(n) > 0$  となる。

もし  $|R_{k,s}(n, \mathfrak{m})| = o(P^{s-k})$  に相当することを証明できないなら、十分大きい  $n$  が  $s$  個の  $k$  乗数の和で表せるということを上の方法で証明することはできない、と言っていいだろう。そういうときは、“ほとんど全ての  $n$  は” その形で表せる、ということを示すことをとりあえずの目標としよう。個々の  $n$  に対して  $|R_{k,s}(n; \mathfrak{m})|$  が期待されるくらい小さいと示せなくても、 $n$  について平均的には  $|R_{k,s}(n; \mathfrak{m})|$  は小さいことを示そう、というわけである。これを実現する一つの方法が Bessel の不等式あるいは Parseval の等式の利用で、実際、

$$\sum_n |R_{k,s}(n; \mathfrak{m})|^2 = \sum_n \left| \int_{\mathfrak{m}} f(\alpha)^s e(-n\alpha) d\alpha \right|^2 \leq \int_{\mathfrak{m}} |f(\alpha)|^{2s} d\alpha \quad (5)$$

である。

ここで、

$$R_{k,s}(n) = 0 \text{ ならば, } R_{k,s}(n; \mathfrak{M}) = -R_{k,s}(n; \mathfrak{m}) \quad (6)$$

という単純な事実に注目する。そして

$$\mathcal{E}(N) = \{N/2 < n \leq N : R_{k,s}(n) = 0\}$$

とし、当面  $N = P^k$  と設定する。  $n \in \mathcal{E}(N)$  であれば、 $|R_{k,s}(n; \mathfrak{m})| = |R_{k,s}(n; \mathfrak{M})| \gg P^{s-k}$  だから、そういう  $n$  の寄与だけを考えると、(5) の最左辺の和は  $\gg \#\mathcal{E}(N) \cdot (P^{s-k})^2$  であることがわかり、したがって

$$\#\mathcal{E}(N) \cdot (P^{s-k})^2 \ll \int_{\mathfrak{m}} |f(\alpha)|^{2s} d\alpha \quad (7)$$

を得る。この右辺の積分が  $o(P^{2s-k})$  なら  $\#\mathcal{E}(N) = o(P^k) = o(N)$  となるから、

$$\text{もし } P \rightarrow \infty \text{ に際して } \int_{\mathfrak{m}} |f(\alpha)|^{2s} d\alpha = o(P^{2s-k}) \text{ であれば,} \quad (8)$$

ほとんど全ての  $n$  に対して  $R_{k,s}(n) > 0$  であるといえる。

これが、ほとんど全ての自然数がある形の和で表せる、といった結果を示す際の古典的な方針である。

ところで(8)と(4)を比べると、「ほとんどの  $n$  に対して  $R_{k,s}(n) > 0$ 」を証明することは、「大きい各  $n$  に対して  $R_{k,2s}(n) > 0$ 」を証明することと、少々乱暴だが、ほぼ同じことであ

ることが納得されるであろう。これはこの分野では良く知られている原理で、より一般に、少なくとも普通に circle method を使う限りは、「ほとんど全ての自然数が、ある  $S$  という形の和で表せる」とこと、「全ての大きい自然数が  $S + S$  なる形で表せる」ことは、ほぼ同値と言える。今の表現がわかりにくいかもしれないのでもう1つ例を挙げると、「ほとんど全ての自然数が  $x^2 + y^3 + z^4$  ( $x, y, z \in \mathbb{N}$ ) の形で表せる」ということと「十分大きい全ての自然数が  $x_1^2 + x_2^2 + y_1^3 + y_2^3 + z_1^4 + z_2^4$  ( $x_j, y_j, z_j \in \mathbb{N}$ ) の形で表せる」ということは同じこと、といった意味である。

さて、いずれにしてもほとんど全ての自然数がある指定された形の和で表せることが証明できれば、次には、「より小さい、あるいはより密度の薄い、ある集合  $\mathcal{B}$  をもってきて、 $\mathcal{B}$  に属する自然数に限ってその形の和で表せないものの個数を数えても、自明でない上からの評価を与えられる」ということを示すことによって、結果をより精密化したい、という問題意識が生ずる。つまり、 $\mathcal{B}$  に属するほとんど全ての自然数はその形の和で表せる、という結論を、できるだけ小さい集合  $\mathcal{B}$  に対して示すことを目指そうというわけである。この場合でも、従来ある方法では minor arcs 上の積分の2乗平均を扱う。上の Waring 問題の場合を例に続けければ、まず(6)により、

$$\sum_{\substack{n \in \mathcal{B} \\ n \leq N}} |R_{k,s}(n; \mathfrak{M})|^2 \geq \sum_{n \in \mathcal{B} \cap \mathcal{E}(N)} |R_{k,s}(n; \mathfrak{M})|^2 \gg \#(\mathcal{B} \cap \mathcal{E}(N)) \cdot (P^{s-k})^2$$

である。そこで、この最左辺を

$$\sum_{\substack{n \in \mathcal{B} \\ n \leq N}} \left| \int_{\mathfrak{m}} f(\alpha)^s e(-n\alpha) d\alpha \right|^2 = \int_{\mathfrak{m}} \int_{\mathfrak{m}} f(\alpha)^s f(-\beta)^s \sum_{\substack{n \in \mathcal{B} \\ n \leq N}} e((\beta - \alpha)n) d\alpha d\beta$$

と書いて、最後の2重積分を上から抑えれば、 $\mathcal{B}$  内に限定した例外集合  $\mathcal{B} \cap \mathcal{E}(N)$  の密度に対する上からの評価が得られる、というのが従来の着想である。この最後の2重積分は、 $N$  以下の  $\mathcal{B}$  の元  $n$  をわたる指数和  $\sum e((\beta - \alpha)n)$  に対する結果を基にして、評価されることになるのである。

### 3. 例外集合上で直接平均をとる — 3乗数の Waring 問題への応用.

前節の最後にあるような問題に対し、[2] 以下の一連の論文の基にある着想は、minor arcs 上の積分の2乗平均でなく、生のままの平均をとろう、というものである。(6)にある式をそのまま  $n$  について足すわけである。もちろん(6)は例外集合に属する  $n$  だけに関することだから、そのような  $n$  についてだけ(6)の式を直接足し合わせることになる。すると、

$$\sum_{n \in \mathcal{B} \cap \mathcal{E}(N)} R(n; \mathfrak{M}) = - \sum_{n \in \mathcal{B} \cap \mathcal{E}(N)} R(n; \mathfrak{m}) = - \int_{\mathfrak{m}} f(\alpha)^s \sum_{n \in \mathcal{B} \cap \mathcal{E}(N)} e(-n\alpha) d\alpha \quad (9)$$

であり、major arcs の寄与からこの式の値は  $\gg \#(\mathcal{B} \cap \mathcal{E}(N)) \cdot P^{s-k}$  である。この式の一番右の積分を上から抑えれば、したがって、 $\#(\mathcal{B} \cap \mathcal{E}(N))$  に対する評価が得られるわけである。

手始めにこの方法で  $\#\mathcal{E}(N)$  を評価してみよう. つまり (9) で  $\mathcal{B} = \mathbb{N}$  とするわけだが, まず

$$\int_0^1 \left| \sum_{n \in \mathcal{E}(N)} e(-n\alpha) \right|^2 d\alpha = \sum_{n_1, n_2 \in \mathcal{E}(N)} \int_0^1 e((n_1 - n_2)\alpha) d\alpha = \#\mathcal{E}(N)$$

に注意して (9) の最右辺の積分に Schwarz の不等式を使えば,

$$\int_m f(\alpha)^s \sum_{n \in \mathcal{E}(N)} e(-n\alpha) d\alpha \ll \left( \int_m |f(\alpha)|^{2s} d\alpha \right)^{1/2} (\#\mathcal{E}(N))^{1/2}$$

であり, 一方いまは (9) の左端が  $\gg \#\mathcal{E}(N) \cdot P^{s-k}$  だから, 結局,

$$\#\mathcal{E}(N) \cdot P^{s-k} \ll \left( \int_m |f(\alpha)|^{2s} d\alpha \right)^{1/2} (\#\mathcal{E}(N))^{1/2}$$

を得る. これは (7) と全く同じことである. 即ち, (9) に基づく方針は, 前節で見た Bessel の不等式を使う古典的な方法と比べて劣ることはないし, もしいま見た Schwarz の不等式を単純に使って (9) の右端の積分を評価するよりも効果的な方法があれば, この方針の方が従来の方法よりも強い結果を導くことがわかる.

もちろん, 実際に (9) の右端の積分を評価する, より有効な方法があるかどうかは場合による. ここではそういう方法がある場合の例を 1 つ見ることにする.  $\mathcal{B}$  を平方数の集合とし,  $k=3, s=6$  とする. そして, 上で  $\mathcal{B} \cap \mathcal{E}(N)$  と書いていたものの代わりに, 意味は同じだが,

$$\mathcal{Z}(N) = \{N/2 < n \leq N : R_{3,6}(n^2) = 0\}$$

という集合の大きさを評価することを考える. この場合は  $n^2$  を 6 つの立方数の和で表そうとするわけだから,  $N^2 = P^3$  と設定する. すると (6) により

$$\sum_{n \in \mathcal{Z}(N)} R_{3,6}(n^2; \mathfrak{M}) = - \int_m f(\alpha)^6 K(\alpha) d\alpha, \quad \text{ただし, } K(\alpha) = \sum_{n \in \mathcal{Z}(N)} e(-n^2\alpha)$$

である. (3) から, いまの設定の下で  $R_{3,6}(n^2; \mathfrak{M}) \gg P^3$  なので, Hölder の不等式を使って

$$\#\mathcal{Z}(N) \cdot P^3 \ll I_1^{3/4} I_2^{1/4}, \quad \text{ここで, } I_1 = \int_m |f(\alpha)|^8 d\alpha, \quad I_2 = \int_0^1 |K(\alpha)|^4 d\alpha. \quad (10)$$

簡略化して,  $Z = \#\mathcal{Z}(N)$  と書くことにしよう. 直交性から,  $I_2$  は

$$n_1^2 + n_2^2 = n_3^2 + n_4^2, \quad n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathcal{Z}(N) \quad (11)$$

なる不定方程式の解の個数に等しい. 自然数  $m$  を 2 つの平方数の和で表す方法の数は  $m$  の約数の個数を超えないことが知られているから,  $n_1$  と  $n_2$  を 1 組固定すると, 上の式をみたす  $n_3, n_4$  の組の個数は  $O(N^\varepsilon)$  であり<sup>†</sup>, よって  $I_2 \ll Z^2 N^\varepsilon$  である.

<sup>†</sup>文字  $\varepsilon$  については通常の習慣に従う. つまり,  $\varepsilon$  を含む主張は, それが (十分小さく) 任意に固定した正数  $\varepsilon$  に対して成立することを意味し, その際に記号  $O, \ll$  等で省略される定数は  $\varepsilon$  に依存し得る.

一方, ある正数  $\xi$  に対して  $I_1 \ll P^{5-\xi}$  という評価が成立するとしよう. これは, (8) によれば, ほとんど全ての自然数は 4 つの立方数の和で表せるという Davenport の結果に対応するもの, と言うことができる. いずれにしてもそれを仮定して先の  $I_2$  の評価と共に (10) に代入すれば,  $ZP^3 \ll (P^{5-\xi})^{3/4}(Z^2N^\epsilon)^{1/4}$  となり,  $P = N^{2/3}$  に注意して整理すると,

$$\# \mathcal{Z}(N) = Z \ll P^{3(1-\xi)/2} N^\epsilon \ll N^{1-\xi+\epsilon} \quad (12)$$

を得る. ということで  $\xi$  の大きさが問題になるが, とにかく  $\xi$  が正でありさえすれば, これは自明ではない評価である.

$\xi$  の大きさの話はとりあえずおいておいて, ここで, 前節の最後に記した従来のアプローチでどの程度の  $Z$  の評価が得られるかをみておこう. その方法では,

$$\sum_{n \leq N} |R_{3,6}(n^2; \mathbf{m})|^2 = \int_{\mathbf{m}} \int_{\mathbf{m}} f(\alpha)^6 f(-\beta)^6 \sum_{n \leq N} e((\beta - \alpha)n^2) d\alpha d\beta \quad (13)$$

を評価することになる. まず準備として,

$$\int_0^1 |f(\alpha)|^6 d\alpha \ll P^{13/4} \quad (14)$$

に “ほぼ相当すること” が知られていることを注意しておく. この歯切れの悪い言い方は,  $f(\alpha)$  の定義を修正して  $f(\alpha)$  を smooth Weyl sum に置き換えると (14) が証明できる, という意味なのだが, このあたりではそういうことを厳密に書かなくても良いと思うので, 少々ズルをさせていただく. 因みに Wooley によるこの方向で現在最良の結果によると, 上記の指数  $13/4$  はもうちょっとだけ小さく  $3.2495$  程度にできるが, そこまで細かいこともここでは言いつこなしにする.

さて, (13) の右辺の内側の  $n$  についての指数和は平方数に対する普通の Weyl 和で,  $\beta - \alpha$  が適当に定義された minor arcs に入るときには, Weyl の不等式から,  $\sum e((\beta - \alpha)n^2) \ll N^{1/2+\epsilon}$  である. もちろんこの評価が成立しない場合もあるわけだが, こういう minor arcs 上の評価が常に成立すると仮定した場合よりも強い結果は示せない, というのが, circle method を使う者にとっての常識である, と言っていいと思う. つまり (13) の場合であれば, うまくいっても

$$\sum_{n \leq N} |R_{3,6}(n^2; \mathbf{m})|^2 \ll N^{1/2+\epsilon} \left( \int_0^1 |f(\alpha)|^6 d\alpha \right)^2 \ll N^{1/2+\epsilon} P^{13/2}$$

という評価よりも実質的に強いことは得られないと思われるのである. まあ, 上述のことから最後の  $13/2$  はほんのちよつとは小さくできるから, 最後の  $N$  のべきにある  $\epsilon$  は無視することにしよう. すると, 再び (6) によって (13) の左辺は  $\gg Z(P^3)^2$  だから,

$$Z \ll N^{1/2} P^{1/2} \ll N^{5/6}. \quad (15)$$

従来の方法では, 事実上これを超える評価は得られないと思われる.

一方 Weyl の不等式から,  $\alpha \in m$  なら  $f(\alpha) \ll P^{3/4+\epsilon}$  なので, (14) を使えば,

$$\int_m |f(\alpha)|^8 d\alpha \leq \left( \sup_{\alpha \in m} |f(\alpha)| \right)^2 \int_0^1 |f(\alpha)|^6 d\alpha \ll P^{19/4+\epsilon},$$

つまり先の  $\xi$  はほぼ  $1/4$  とできることになる. よって (12) から,  $Z \ll N^{3/4}$  くらいの評価は得られる. これと (15) を比較すれば, この場合は従来の 2 乗平均を扱う方法より (9) に基づく方が強い結果が得られることがわかる.

(14) を基に  $|f(\alpha)|^8$  の  $m$  上の積分を評価するには, minor arcs 上に制限した iterative method と呼ばれる Vaughan の方法もあって, 実際には  $\xi$  は  $1/4$  よりももっと大きくできる. そういう技術的な話には触れないが, いずれにしても上記の (12) を導く議論が, 下の定理 1 の前半部分の証明の概略であり, その結論からわかるように, 上の例の場合だと  $\xi$  の値は  $9/28$  よりほんのちょっと大きくできるのである.

上では平方数の中で 6 つの立方数の和で表せないものの密度を評価したが, 「平方数」を「ある固定した 2 次式の値」で置き換えても, 全く同じ議論が成立する. 定理はそういう一般的な形で述べることにする. 以下,  $\phi(t)$  を,  $t$  が整数なら  $\phi(t)$  も必ず整数であるような 1 次以上の多項式とする. したがって  $\phi$  の係数は必然的に有理数である. また, 大した条件ではないが,  $\phi(t)$  の最高次の係数は正であるとする. 次節以降も通して  $\phi$  はそういう多項式であるとする. さらに,  $N$  以下の自然数  $n$  で,  $\phi(n)$  が 6 個の立方数の和で表せない  $n$  の個数を  $E_\phi(N)$  とする. このとき次の評価が成立する.

**定理 1 (Brüdern-K<sup>2</sup>-Wooley [2])**  $\phi$  が 2 次なら  $E_\phi(N) \ll_\phi N^{19/28}$ ,  
 $\phi$  が 3 次なら  $E_\phi(N) \ll_\phi N^{37589/40390}$ .

後者の  $\phi$  が 3 次の場合も, (15) と同様に従来の 2 乗平均を抑える方法でどのくらいの評価が得られるかを調べてみると, 現状ではそうやると自明でない評価は得られないことがわかる. つまり,  $\phi$  が 3 次の場合の  $E_\phi(N)$  の自明でない評価は初めて得られたもので, 例えばほとんど全ての立方数が 6 つの立方数の和でかける, というのは新しい結果である.

また定理 1 では, 多項式  $\phi$  の係数は  $O(1)$  とみなす状態を想定しているが, 例えば大きい自然数  $m$  に対して  $\phi(t) = m - t^3$ ,  $N = m^{1/3}$  と設定しても証明はそのまま成立し, この場合は Vinogradov の記号  $\ll$  に含まれる定数は絶対定数になる. すると定理 1 から,  $m^{1/3}$  以下のほとんど全ての  $n$  に対して  $m - n^3$  は 6 つの立方数の和となるわけだから, この結果は, 十分大きい  $m$  は 7 つの立方数の和で表せるという Linnik の定理よりやや精密な主張を含む. 即ち, 大きい自然数  $m$  を 7 つの立方数の和として表す際, 7 つのうちの 1 つの立方数は “ほとんど自由に” 指定することができる, というわけである.

#### 4. The binary Goldbach problem について.

前節では立方数に対する Waring 問題を例にとったが, 基となる着想自体はかなり広い範囲の加法的問題に応用できることは明らかである. ここでは 4 以上の偶数は 2 つの素数の和で表せるだろう, という Goldbach の予想に関連した例外集合の密度の評価について述べよう.



$\phi$  を、前頁の定理 1 の直前に述べたような多項式とし、 $N$  以下の自然数  $n$  のうち、 $2\phi(n)$  が 2 つの素数の和とならないような  $n$  の個数を  $E'_\phi(N)$  とする。Goldbach の予想が真ならば、もちろん  $E'_\phi(N) \ll_\phi 1$  である。これに関し、Perelli [7] は 1996 年に、任意に固定した正数  $A$  に対し、

$$E'_\phi(N) \ll_{\phi, A} N(\log N)^{-A}$$

を示した。Perelli [7] はこれを、§2 の最後にあるような、minor arcs 上の積分の 2 乗平均を評価する方法によって証明した。最後の結果の強さは major arcs をどれだけ広くとれるかにも関係するが、素数が絡む問題だから、それは Dirichlet の  $L$  関数の零点分布の問題とも関係している。だが、仮に Dirichlet の  $L$  関数に対する一般 Riemann 予想を仮定しても、従来の方で Perelli [7] と同じ議論をすると、 $E'_\phi(N) \ll N^{1-c/(d^3 \log 2d)}$  という形の評価 ( $c$  はある正定数、 $d = \deg \phi$ ) が限界である。我々は、しかし、前節でみた (9) のような方法によって、unconditional に次の結果を示すことができる。

**定理 2 (Brüdern–K<sup>2</sup>–Wooley [1])** ある正定数  $c$  があって、 $E'_\phi(N) \ll_\phi N^{1-c/d}$ 、ただし、 $d$  は  $\phi$  の次数である。

## 5. 漸近式について.

§2 において、 $R_{k,s}(n)$  の主要部は (3) の  $R_{k,s}(n; \mathfrak{M})$  の寄与で与えられるだろう、という予想をちらっと書いたが、即ち、 $s > k$  ならば、

$$R_{k,s}(n) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{k}\right)^{-1} \mathfrak{S}_{k,s}(n) n^{\frac{s}{k}-1} + o(n^{\frac{s}{k}-1}) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (16)$$

であろうと期待されている。この予想は Hardy–Littlewood による。実際に (4) の仮定が正しければ、単に大きい  $n$  に対して  $R_{k,s}(n) > 0$  というだけでなく、この漸近式 (16) も証明されるわけで、 $k$  に比べて  $s$  がそれなりに十分大きいときは、現実にそうであることが既知である。同様に、(8) の方の仮定が成立すれば、ほとんど全ての  $n$  に対して漸近式 (16) が成立する、と言うべき状況である。§3 でみた我々の方法は、こういう予想される漸近式がほとんど全ての自然数に対して成立する、というタイプの結果をも、場合によってはより精密にすることができる。漸近式を考察する場合でも本質的には議論はほとんど変わらないと言えるが、少々修正を要する点もあるから、本節ではその点について、再度立方数の Waring 問題の場合を例にとって述べさせていただきたい。

以下、 $k = 3$  とする。 $R_{3,s}(n)$  に対する漸近式 (16)<sup>†</sup> は  $s \geq 9$  なら成立する、というのは Hua の古典的な結果で、さらに Vaughan は  $s = 8$  に対してもその成立を証明した。 $4 \leq s \leq 7$  の場合には未だ (16) は示されていないが、これらの場合についても、“ほとんど全ての  $n$  に対して (16) は成立する” ことが、Hua および Vaughan の結果に含まれている。これは §2 で触れた (4) と (8) の比較からも納得されるであろう。我々は、この (16) 自身は証明できて

<sup>†</sup> §2 では singular series  $\mathfrak{S}_{k,s}(n)$  の大きさについても曖昧なことしか記さなかったが、 $k = 3$  の場合は、 $s \geq 5$  なら  $1 \ll \mathfrak{S}_{3,s}(n) \ll 1$ 、 $s = 4$  の場合は  $1 \ll \mathfrak{S}_{3,4}(n) \ll (\log \log 3n)^4$  である。

いない場合について、「その予想される漸近式(16)にそぐわない可能性のある自然数  $n$  は、ある与えられた多項式  $\phi(t)$  のとる値の集合という密度の薄い集合内に制限してもほとんどない」ということを示すことを目指す。ここで、 $\phi(t)$  は §3 の定理 1 の直前に規定されているような多項式とする。より具体的には、正数  $\gamma$  に対し、 $\phi(n) > 1$  かつ

$$\left| R_{3,s}(\phi(n)) - \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{3}\right)^{-1} \mathfrak{S}_{3,s}(\phi(n)) \phi(n)^{\frac{s}{3}-1} \right| > \phi(n)^{\frac{s}{3}-1} (\log \phi(n))^{-\gamma} \quad (17)$$

をみたす  $N$  以下の自然数  $n$  の個数を  $E_{\phi,\gamma,s}(N)$  とし、これを評価するのである。そのためには、これらの条件をみたす  $n$  のうち区間  $(N/2, N]$  に属す  $n$  の集合を  $\mathcal{E}_{\phi,\gamma,s}(N)$  として、 $\#\mathcal{E}_{\phi,\gamma,s}(N)$  を評価すれば十分である。

$N$  を大きい実数とし、 $\phi(N) = P^3$  と設定する。 $n \in \mathcal{E}_{\phi,\gamma,s}(N)$  であれば、(17) と (3) から、 $|R_{3,s}(\phi(n); m)| \gg P^{s-3}(\log P)^{-\gamma}$  である。この不等式を(6)にある等式の代わりと思って  $\mathcal{E}_{\phi,\gamma,s}(N)$  内の全ての  $n$  に対して足し合わせるわけだが、そうしたときに(9)の最右辺のように積分がかけなくては仕方がないから、 $|R_{3,s}(\phi(n); m)|$  の絶対値をはずしておく必要がある。が、これは難しいことではない。単に  $R_{3,s}(\phi(n); m)$  の符号を考慮すればいいことで、その符号を  $\eta_n$  で表そう。 $m$  は  $[0, 1)$  の部分集合だったが、ちょっと考えればわかる通り  $1/2$  に関して対称になっているので、このことから  $R_{3,s}(\phi(n); m)$  は実数であることがわかるのだが、まあそんなことを言わなくても、 $|R_{3,s}(\phi(n); m)| = \eta_n R_{3,s}(\phi(n); m)$  によって複素数  $\eta_n$  を定義する、としておいても良い。いずれにしても、 $n \in \mathcal{E}_{\phi,\gamma,s}(N)$  に対して、

$$P^{s-3}(\log P)^{-\gamma} \ll |R_{3,s}(\phi(n); m)| = \eta_n R_{3,s}(\phi(n); m)$$

だから、そういう  $n$  全てについて足すことによって、

$$\#\mathcal{E}_{\phi,\gamma,s}(N) P^{s-3}(\log P)^{-\gamma} \ll \sum_{n \in \mathcal{E}_{\phi,\gamma,s}(N)} \eta_n R_{3,s}(\phi(n); m) = \int_m f(\alpha)^s K(\alpha) d\alpha, \quad (18)$$

ただし、 $K(\alpha) = \sum_{n \in \mathcal{E}_{\phi,\gamma,s}(N)} \eta_n e(-\phi(n)\alpha)$  である。

違うのはここまでで、これ以降は §3 のような問題の場合と同じ、と言える。(18)の右端の積分を評価することで  $\#\mathcal{E}_{\phi,\gamma,s}(N)$  の、したがって  $E_{\phi,\gamma,s}(N)$  の、評価が得られるわけである。指数和  $K(\alpha)$  の定義に、 $\eta_n$  が weight としてくっついている点が §3 のときと違うが、 $|\eta_n| = 1$  だから、それは実際には何の変わりも引き起こさない。我々はいずれにしても  $K(\alpha)$  のような和のことはよくわからないから、§3 の(10)のように  $|K(\alpha)|$  の偶数乗の積分を、対応する不定方程式の解の個数とみて抑えるしか事実上方法がない。例えばその(10)のときは、 $\phi(t) = t^2$  の場合で、 $|K(\alpha)|$  の 4 乗平均  $I_2$  を不定方程式(11)の解の個数とみて評価したが、もしその  $K(\alpha)$  の定義に本節の場合のような weight  $\eta_n$  がくっついていれば、 $I_2$  は(11)のそれぞれの解に対応する  $\eta_{n_1} \eta_{n_2} \overline{\eta_{n_3} \eta_{n_4}}$  を足し合わせたものになるだけだから、 $\eta_n$  が  $O(1)$  である限りは  $I_2$  に対する評価は変わらないのである。

というわけで、 $\eta_n$  が現れていてもそれ自体はその後の議論や評価に何の影響もなく、あとは(18)の右端の積分を、ある意味前と同様に評価していくことになる。ただし、(16)の

ような漸近式を相手にする場合は、技術的には大きな違いがあつて、それは(1)で定義した Weyl 和  $f(\alpha)$  を絶対に使わなくては行けない、つまり、 $f(\alpha)$  を smooth Weyl sum など置き換えるというような技巧が許されない、ということである。そのため、当然と言えば当然のことだが、得られる評価は §3 のような場合よりもずっと弱いものにならざるを得ない。

いずれにしても、(18) の最後の積分の評価を通して、上の  $E_{\phi,\gamma,s}(N)$  に対して次の結果を示すことができる。

**定理 3 (Brüdern–K<sup>2</sup>–Wooley [3])**  $\phi$  が 2 次式であれば、

$$E_{\phi,\gamma,6}(N) \ll_{\phi,\epsilon} N(\log N)^{-2+\gamma+\epsilon}, \quad E_{\phi,\gamma,7}(N) \ll_{\phi,\epsilon} N^{2/3+\epsilon},$$

$\phi$  が 3 次式であれば、

$$E_{\phi,\gamma,7}(N) \ll_{\phi,\epsilon} N(\log N)^{-2+2\gamma+\epsilon}.$$

言うまでもないが、 $\deg \phi = 2, s = 6$  の場合は  $0 < \gamma < 2$  なる  $\gamma$  に対して、 $\deg \phi = 3, s = 7$  の場合は  $0 < \gamma < 1$  なる  $\gamma$  に対して、それぞれ非自明な評価になっている。また、些細なことだが、 $\deg \phi = 2, s = 6$  の場合の評価の  $\log N$  の指数にある  $-2 + \gamma$  の部分は  $5/2 - 2\gamma$  にすることもできて、 $0 < \gamma < 1/2$  の場合はこっちの方がちょっといい。

## 6. 結び.

実は、5 つの論文 [2], [1], [3], [4] および [6] は、元々は 1 つの論文として書かれたものであった。当然非常に長い論文であつて、それを投稿したところ、やはり長すぎるという理由で 2 つの雑誌に続けて断られることになった。しかし 2 つめの Ann. Scient. École. Norm. Sup. からは、[2] の内容に絞れば長さも適当になるから、そうしてくれれば掲載する、との回答があつたので、それをきっかけにして論文を 5 つに分割することにしたのである。

本稿では [1]–[3] にある手法と主な結果について記したが、ここでこのシリーズ<sup>§</sup>の他の論文について簡単に触れさせていただく。

まず、定理 1 では、例えばほとんど全ての平方数が 6 つの立方数の和になる、という形の結論を示したが、これを 5 つの立方数にして同じ方法を適用するとどうなるかという、これは現状では自明でない評価を与えることができないのである。こういう場合でも、しかし、§3 の (9) のような方法の変形として、かなり多くの平方数が 5 つの立方数の和になる、といった方向の自明でない結論を引き出すことができ、[4] や [5] ではこういった、与えられた集合に属す数のうち指定された形の和で表せるものの個数に対する下からの評価を与える、という型の問題を扱った。[6] は [2] と同系統の論文だが、純粋な Waring 問題のようにべきがそろっていない、mixed sums などと呼ばれる形の加法的問題を論じている。

[2] 以降まだあまり時間が経ってはいないが、既にそのシリーズ以外にも関連する仕事はいくつも発表されている。それらを全て列挙することはここではしないが、とくに Wooley

<sup>§</sup> どうでもいいことだが、筆者 3 人の間では、題名 (Additive representation in thin sequences) の頭文字を取って、このシリーズを ARTS series と呼んでいる。

の仕事 [9], [10] を参考文献に加えておきたい. 本稿にあるように, [2] のシリーズでは多項式のとる値の集合という密度の薄い集合内における例外の数の密度についての新しい評価を与えたが, そのような密度の薄い集合に限らず, 全ての自然数の中での例外集合の密度に対しても, 場合によっては(9) のような方法で強い評価を与えることもできる — このことを初めて示してみせたのが Wooley [9] である. 言われてみれば簡単なこと, ではあるのだが, 個人的にはとても驚いたし, Wooley さんはやはりすごい, と改めて感じ入った. そこに含まれている結果の中には既に改良されているものもあるが, Wooley [9], [10] は大変重要な仕事であると思う.

いずれにしても, 例えば(9) のように, minor arcs 上の積分の 2 乗平均でなく, 1 乗のまま直接例外集合上で平均をとる, という方法は, 既にこの領域の常識の 1 つとなっていると言って良いだろう.

## References

- [1] J. Brüdern, K. Kawada and T. D. Wooley, “Additive representation in thin sequences, II: the binary Goldbach problem,” *Mathematika* 47 (2000), 117-125.
- [2] J. Brüdern, K. Kawada and T. D. Wooley, “Additive representation in thin sequences, I: Waring’s problem for cubes,” *Ann. Scient. École. Norm. Sup. (4)* 34 (2001), 471-501.
- [3] J. Brüdern, K. Kawada and T. D. Wooley, “Additive representation in thin sequences, III: asymptotic formulae,” *Acta Arith.* 100 (2001), 267-289.
- [4] J. Brüdern, K. Kawada and T. D. Wooley, “Additive representation in thin sequences, IV: lower bound methods,” *Quart. J. Math. Oxford (2)* 52 (2001), 423-436.
- [5] J. Brüdern, K. Kawada and T. D. Wooley, “Additive representation in thin sequences, VI: representing primes, and related problems,” *Glasg. Math. J.* 44 (2002), 419-434.
- [6] J. Brüdern, K. Kawada and T. D. Wooley, “Additive representation in thin sequences, V: mixed problems of Waring’s type,” *Math. Scand.* 92 (2003), 181-209.
- [7] A. Perelli, “Goldbach numbers represented by polynomials,” *Rev. Mat. Iberoamericana* 12 (1996), 477-490.
- [8] R. C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood method*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1997.
- [9] T. D. Wooley, “Slim exceptional sets for sums of four squares,” *Proc. London Math. Soc. (3)* 85 (2002), 1-21.
- [10] T. D. Wooley, “Slim exceptional sets for sums of cubes,” *Canad. J. Math.* 54 (2002), 417-448.